

多項式展開による連続分布転位法の
特異積分方程式の数値解析法*野田 尚 昭*¹, 松 尾 忠 利*²Numerical Solution of Singular Integral Equations
Using Polynomial Expansion Method

Nao-Aki NODA and Tadatoshi MATSUO

In this paper, the continuously distributed dislocation model method is applied and the crack problems are formulated as the singular integral equations with Cauchy-type kernel. In the numerical calculation, the unknown dislocation densities are approximated by the products of the weight function and Chebyshev polynomials. The accuracy of stress intensity factors obtained by this method is verified by comparing these values with the exact solution and the reliable numerical solution obtained by other researchers. The present method is found to give rapidly converging numerical results not only for internal crack problems but also for edge crack problems.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Continuously Distributed Dislocation Model Method

1. 緒 言

き裂の応力拡大係数の解析方法については、これまでに、等角写像法、Laurent 展開法、境界分割法、体積力法、連続分布転位法、あるいは、有限要素法などが提案されており、それぞれの特徴によって使い分けられている。これらの数値解析法の中でも連続分布転位法は、解析しようとする問題において、転位をき裂内部に適当に分布させることによって、問題をコーシー核を有する特異積分方程式で表現しようとするもので、古くから多くの研究者によって用いられている。問題を解くことは、未知関数であるき裂面における転位密度を求めることに帰着される。

この特異積分方程式の数値解析法として、これまで Erdogan⁽¹⁾, Theocaris - Ioakimidis⁽²⁾, Boiko - Kerpenko⁽³⁾, 藤本⁽⁴⁾などの多くの研究者によりいくつかの方法が提案されている。

最近著者らは、転位の代わりに転位より特異性の次数の大きい食違いを連続的に分布させて、き裂面の境

界条件を満足させる体積力法において、未知関数を基本密度関数と多項式の積によって近似する方法が高精度の結果を与えることをいくつかの具体的問題で示した⁽⁵⁾⁽⁶⁾。そこで、本論文では、コーシー核を有する連続分布転位法の特異積分方程式において、未知関数を基本転位密度関数と多項式の積で近似する方法を用いて、前報の高次特異性を有する超越特異積分方程式を用いた結果と比較を行った。また、十字き裂、内部き裂、縁き裂などの解析を行い、これまで特異積分方程式法の解法として提案されている数値積分公式を用いる方法並びに厳密解との比較をすることによってその精度の検証を行った。

2. 多項式展開による特異積分方程式の
数値解析法

本解析法において行った数値解析の方法を内部き裂と縁き裂についてそれぞれ述べる。

2.1 内部き裂の数値解析法 弾性体の内部に長さ $(b-a)$ の平面ひずみ状態のき裂が存在するとき、問題は、き裂のない弾性体の仮想き裂面上に分布させた転位密度 $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ を未知関数とする次のような積分方程式で表される。

* 平成3年4月1日 第68期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成3年3月25日。

*¹ 正員、九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*² 学生員、九州工業大学大学院。

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{P_1(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_a^b K_{11}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ & + \int_a^b K_{12}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+x}{2G} p(x) \\ & \int_a^b \frac{P_2(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_a^b K_{21}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ & + \int_a^b K_{22}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+x}{2G} q(x) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\int_a^b P_1(\xi) d\xi = 0, \int_a^b P_2(\xi) d\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

G : 横弾性係数, $\kappa = 3-4\nu$, ν : ポアソン比

ここで, $\oint$ は積分のコーシーの主値を取ることを意味して, $K_{ij}(\xi, x)$ ($i, j=1, 2$) は直線縁の影響を補正する関数であり, $p(x)$, $q(x)$ は, 仮想き裂面上で打ち消すべき表面力である。式(2)は転位の総和が零であるという変位の一価性条件の式である。

積分区間が $[-1, 1]$ になるように, 変数 ξ, x を次の r, s を用いて変換する。

$$\begin{aligned} r &= \frac{2\xi - (a+b)}{b-a}, s = \frac{2x - (a+b)}{b-a} \\ f_i(r) &= \frac{2P_i(\xi)}{b-a} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

r, s を用いれば式(1), (2)は, 次の式(4), (5)のようになる。

$$\begin{aligned} & \oint_{-1}^1 \frac{f_1(r)}{r-s} dr + \int_{-1}^1 k_{11}(r, s) f_1(r) dr \\ & + \int_{-1}^1 k_{12}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{1+x}{2G} p(s) \\ & \oint_{-1}^1 \frac{f_2(r)}{r-s} dr + \int_{-1}^1 k_{21}(r, s) f_1(r) dr \\ & + \int_{-1}^1 k_{22}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{1+x}{2G} q(s) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\int_{-1}^1 f_1(r) dr = 0, \int_{-1}^1 f_2(r) dr = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(4)の解法として, ここでは, 未知関数 $f_i(r)$ ($i=1, 2$) を式(6)のように基本転位密度関数 $w_i(r)$ ($i=1, 2$) と Chebyshev 多項式 $T_n(r)$ の積で近似する。

$$\begin{aligned} w_i(r) &= \frac{1+x}{2G\sqrt{1-r^2}} \quad (i=1, 2) \\ f_1(r) &= w_1(r) F_1(r), F_1(r) = \sum_{n=1}^N a_n T_n(r) \\ f_2(r) &= w_2(r) F_2(r), F_2(r) = \sum_{n=1}^N b_n T_n(r) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

そして, 特異性を含む項は次の積分公式を利用する。

$$\oint_{-1}^1 \frac{T_n(r)}{(r-s)\sqrt{1-r^2}} dr = \pi U_{n-1}(s) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで, $T_n(r)$, $U_n(r)$ は, それぞれ, 第一種, 第二種

の Chebyshev の多項式であり, 次のような形で定義される。

$$T_n(r) = \cos(n\theta), U_{n-1}(r) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}, r = \cos\theta \quad \dots\dots\dots (8)$$

以上のような離散化の方法によって, 式(4)の積分方程式は, 式(9), (10)の $2N$ 元の連立方程式になり, 問題は, 係数 a_n, b_n を解くことに還元される。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N [a_n \{\pi U_{n-1}(s) + A_n(s)\} + b_n B_n(s)] &= -\pi p(s) \\ \sum_{n=1}^N [a_n C_n(s) + b_n \{\pi U_{n-1}(s) + D_n(s)\}] &= -\pi q(s) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} A_n(s) &= \int_{-1}^1 k_{11}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ B_n(s) &= \int_{-1}^1 k_{12}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ C_n(s) &= \int_{-1}^1 k_{21}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$D_n(s) = \int_{-1}^1 k_{22}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr$$

また, 式(5)の変位の一価性条件の式は以上のような離散化の方法により自動的に満たされる。

境界条件を満たす点は次式で与えられる。

$$s = \cos\left(\frac{2j}{N-1} \frac{\pi}{2}\right), j=1, 2, \dots, N \quad (-1 < s < 1) \quad \dots\dots\dots (11)$$

き裂先端の応力拡大係数は次式で定義される。

$$\begin{aligned} K_{IB} &= F_{IB}(1) \sqrt{\pi(b-a)/2}, \\ K_{IA} &= F_{IA}(-1) \sqrt{\pi(b-a)/2} \\ K_{IIB} &= F_{IIB}(1) \sqrt{\pi(b-a)/2}, \\ K_{IIA} &= F_{IIA}(-1) \sqrt{\pi(b-a)/2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (12)$$

2.2 縁き裂の数値解析法 弾性体内に長さ a の縁き裂が存在するとき, 問題は, き裂のない弾性体の仮想き裂面上に分布させた転位密度 $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ を未知関数とする次のような積分方程式で表される。

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{P_1(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_0^a K_{11}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ & + \int_0^a K_{12}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+x}{2G} p(x) \\ & \int_0^a \frac{P_2(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_0^a K_{21}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ & + \int_0^a K_{22}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+x}{2G} q(x) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

積分区間が $[0, 1]$ になるように, 変数 ξ, x を次の r, s を用いて変換する。

$$r = \frac{\xi}{a}, s = \frac{x}{a}, f_i(r) = \frac{P_i(\xi)}{a} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(14)$$

式(7)の積分公式が利用できるように式(13)を次のように変形する。

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{f_1(r)}{r-s} dr - \int_{-1}^0 \frac{f_1(r)}{r-s} dr + \int_0^1 k_{11}(r, s) f_1(r) dr \\ & + \int_0^1 k_{12}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{1+x}{2G} p(s) \\ & \int_{-1}^1 \frac{f_2(r)}{r-s} dr - \int_{-1}^0 \frac{f_2(r)}{r-s} dr + \int_0^1 k_{21}(r, s) f_1(r) dr \\ & + \int_0^1 k_{22}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{1+x}{2G} q(s) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(15)$$

未知関数 $f_i(r)$ ($i=1, 2$) を基本転位密度関数 $w_i(r)$ ($i=1, 2$) と Chebyshev 多項式 $T_n(r)$ の積で近似する。式(15)の第1項に式(7)を適用し、第2, 第3, 第4項は数値積分によって求めると、次の式(16), (17)の $2N$ 元の連立方程式になり、問題は、係数 a_n, b_n を解くことに還元できる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N [a_n \{ \pi U_{n-1}(s) + A_n(s) \} + b_n B_n(s)] = -\pi p(s) \\ & \sum_{n=1}^N [a_n C_n(s) + b_n \{ \pi U_{n-1}(s) + D_n(s) \}] = -\pi q(s) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\begin{aligned} A_n(s) &= - \int_{-1}^0 \frac{T_n(r)}{(r-s)\sqrt{1-r^2}} dr \\ &+ \int_0^1 k_{11}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ B_n(s) &= \int_0^1 k_{12}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ C_n(s) &= \int_0^1 k_{21}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ D_n(s) &= - \int_{-1}^0 \frac{T_n(r)}{(r-s)\sqrt{1-r^2}} dr \\ &+ \int_0^1 k_{22}(r, s) \frac{T_n(r)}{\sqrt{1-r^2}} dr \end{aligned}$$

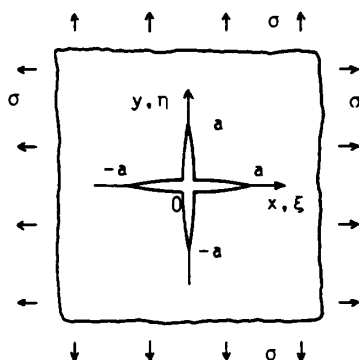


図1 無限板中の十字き裂

$$\dots\dots\dots(17)$$

境界条件を満たす点は次の式で与えられる。

$$s = \cos\left(\frac{2j}{2N-1} \frac{\pi}{2}\right), j=1, 2, \dots, N \quad (0 < s < 1) \quad \dots\dots\dots(18)$$

き裂先端の応力拡大係数は次式で定義される。

$$K_I = F_I(1)\sqrt{\pi a}, K_{II} = F_{II}(1)\sqrt{\pi a} \quad \dots\dots\dots(19)$$

本論文では上記の方法を用いて、半無限板の内部き裂、半無限板の縁き裂などのいくつかの例題を解析し、無次元化応力拡大係数の数値解を求め、厳密解あるいは、数値積分公式を用いる解法や超越特異積分方程式法などの信頼のおける数値解との比較を行う。

3. 数値解析例および考察

3.1 十字き裂 図1に示すような、各き裂の長さが a であるような対称な形をした十字き裂が無限板内で一様二軸引張応力 σ を受けるような問題を考える。この問題の特異積分方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \frac{P(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_{-a}^a \frac{\xi(\xi^2-x^2)}{(\xi^2+x^2)^{3/2}} P(\xi) d(\xi) \\ & = -\pi \frac{x+1}{2G} \sigma \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(20)$$

式(20)を上述の方法で解析して得られた、十字き裂の無次元化応力拡大係数の値の収束状況を、他の論文の値⁽²⁾⁽³⁾とともに表1に示す。ここで N は $-a \leq x \leq a$ の範囲の選点数である。本論文による結果は、Gauss-Chebyshev や Lobatto-Chebyshev の数値積分公式を用いる方法よりも収束性が良く、Boiko らの方法よりも多少悪い。しかし、 $N/2=15$ 程度でも Boiko の解析結果と有効数字4けた程度まで一致する。

3.2 半無限板中の内部き裂 図2に示すような、

表1 無限板中の十字き裂の無次元化応力拡大係数

N/2	Present Analysis	Boiko-Karpenko [3]	Lobatto-Chebyshev Method[2]	Gauss-Chebyshev Method[2]
2	0.90281	0.86412	0.83658	0.94445
3	0.85374	0.86428	0.85970	0.83635
4	0.86687	0.86379	0.86387	0.83882
5	0.86168	0.86365	0.86449	0.86289
6	0.86341	0.86359	0.86441	0.86381
7	0.86296	0.86356	0.86424	0.86528
8	0.86318	0.86356	0.86408	0.86282
9	0.86328	0.86353	0.86396	0.86503
10	0.86325	0.86356	0.86387	0.86283
12	0.86334			
15	0.86348			
18	0.86351			
21	0.86352			
25	0.86353			
30	0.86353			
35	0.86354			

表 2 半無限板中の内部き裂の無次元化応力拡大係数

a/d=0.5				
N/2	Present Analysis		Fujimoto [4]	
	F _I (A)	F _I (B)	F _I (A)	F _I (B)
1	1.089895	1.051646	1.094767	1.054415
2	1.091654	1.053985	1.091304	1.053898
3	1.091332	1.053914	1.091304	1.053904
4	1.091305	1.053904	1.091304	1.053904
5	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
6	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
7	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
8	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
9	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904
10	1.091304	1.053904	1.091304	1.053904

a/d=0.8				
N/2	Present Analysis		Fujimoto [4]	
	F _I (A)	F _I (B)	F _I (A)	F _I (B)
1	1.354188	1.123180	1.491856	1.171283
2	1.402175	1.146014	1.389341	1.145685
3	1.392623	1.146908	1.387476	1.146380
4	1.388719	1.146573	1.387524	1.146416
5	1.387771	1.146452	1.387528	1.146417
6	1.387574	1.146424	1.387528	1.146417
7	1.387536	1.146418	1.387528	1.146417
8	1.387529	1.146417	1.387528	1.146417
9	1.387528	1.146417	1.387528	1.146417
10	1.387528	1.146417	1.387528	1.146417

a/d=0.9				
N/2	Present Analysis		Fujimoto [4]	
	F _I (A)	F _I (B)	F _I (A)	F _I (B)
1	1.553727	1.153680	2.069667	1.300961
2	1.745955	1.198726	1.742502	1.202468
3	1.738335	1.204325	1.708220	1.203254
4	1.721242	1.204419	1.707451	1.203730
5	1.712807	1.204100	1.707622	1.203791
6	1.709469	1.203918	1.707653	1.203797
7	1.708266	1.203841	1.707656	1.203797
8	1.707855	1.203812	1.707656	1.203798
9	1.707720	1.203802	1.707656	1.203798
10	1.707676	1.203799	1.707656	1.203798
11	1.707662	1.203798		
12	1.707658	1.203798		
13	1.707656	1.203798		
14	1.707656	1.203798		

a/d=0.99				
N/2	Present Analysis		Fujimoto [4]	
	F _I (A)	F _I (B)	F _I (A)	F _I (B)
3	3.229821	1.307982	4.895297	1.372572
6	3.786204	1.328642	3.714837	1.328830
9	3.756009	1.330088	3.626008	1.329372
12	3.689253	1.330034	3.625948	1.329740
15	3.653149	1.329904	3.627061	1.329756
18	3.637370	1.329826	3.627272	1.329762
21	3.631059	1.329788	3.627299	1.329763
24	3.628662	1.329773	3.627301	1.329763
27	3.627783	1.329764	3.627301	1.329763
30	3.627469	1.329764	3.627301	1.329763
33	3.627359	1.329764	3.627301	1.329763
36	3.627320	1.329763		
39	3.627308	1.329763		
42	3.627304	1.329763		
45	3.627302	1.329763		
48	3.627301	1.329763		
50	3.627301	1.329763		

半無限板の表面に近いところに、表面に垂直に長さ $2a$ のき裂が存在し、遠方で一様引張応力 σ を受けるような問題を考える。この問題の特異積分方程式は次式で与えられる。

$$\int_{d-a}^{d+a} \frac{P(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_{d-a}^{d+a} \frac{x^2+4\xi x-\xi^2}{(\xi+x)^3} P(\xi) d\xi = -\pi \frac{x+1}{2G} \sigma \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(21)を上述の方法で解析し得られた半無限板の内部き裂の無次元化応力拡大係数の値の収束状況を藤本の論文⁽⁴⁾の値とともに表2に示す。ここで N は $-a \leq x \leq a$ の範囲の選点数である。本解析による応力拡大係数の値の収束性は、藤本の論文⁽⁴⁾と比べて若干悪くやや多くの選点数を必要としている。しかし、選点数を増やすことによって両者の値は有効数字7けたまで完全に一致する。

3.3 縁き裂 図3に示すような、半無限板の縁に垂直に長さ a のき裂が存在し、遠方で一様引張応力 σ を受けるような問題を考える。この問題の特異積分方程式は次式で表される。

$$\int_0^a \frac{P(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_0^a \frac{x^2+4\xi x-\xi^2}{(\xi+x)^3} P(\xi) d\xi = -\pi \frac{x+1}{2G} \sigma \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(22)を上述の方法で解析し得られた、半無限板の

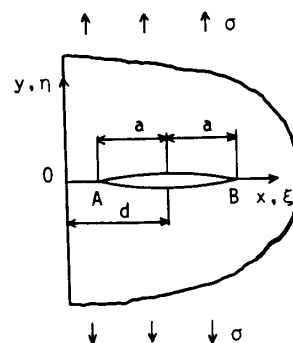


図 2 半無限板中の内部き裂

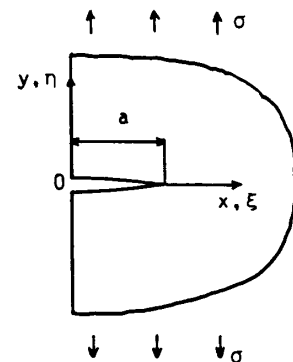


図 3 半無限板の縁き裂

縁き裂の無次元化応力拡大係数の値の収束状況を、Boiko らの論文⁽³⁾の値とともに、表 3 に示す。ここで N は $0 \leq x \leq a$ の範囲の選点数である。縁き裂の問題では、他の研究者らの結果は、内部き裂の問題と比べて収束性が悪く、多くの選点数を必要としている。しかし、本解析による結果は、 $N=30$ 程度で有効数字 7 けた程度まで Koiter の厳密解⁽⁷⁾⁽⁸⁾と一致する。またこの結果は前報の超越特異積分方程式の結果⁽⁶⁾とほぼ同程度の精度である。

3.4 斜め縁き裂 図 4 のように半無限板の直線縁に斜めに長さ a のき裂が存在し、遠方で一様引張応力 σ を受ける問題を考える。

この問題の特異積分方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \frac{2G}{\pi(x+1)} \int_0^a \frac{P_1(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_0^a K_{11}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ & + \int_0^a K_{12}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -p(x) \\ & \frac{2G}{\pi(x+1)} \int_0^a \frac{P_2(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_0^a K_{21}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi \\ & + \int_0^a K_{22}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -q(x) \\ & p(x) = \sigma \sin^2 \theta, q(x) = \sigma \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、直線縁の影響を補正する関数 $K_{ij}(\xi, x)$ ($i, j = 1, 2$) は次のように表される。

$$\begin{aligned} K_{11} &= \sigma_y^{By} \sin^2 \theta + \sigma_x^{By} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy}^{By} \sin \theta \cos \theta \\ K_{12} &= \sigma_y^{By} \sin^2 \theta + \sigma_x^{By} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy}^{By} \sin \theta \cos \theta \\ K_{21} &= (\sigma_y^{By} - \sigma_x^{By}) \sin \theta \cos \theta \\ & + \tau_{xy}^{By} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ K_{22} &= (\sigma_y^{By} - \sigma_x^{By}) \sin \theta \cos \theta \\ & + \tau_{xy}^{By} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{By}|_{Bx=1} &= \sigma_x^{By'}|_{By'=1} \cos \theta - \sigma_{xy}^{By'}|_{Bx'=1} \sin \theta \\ \sigma_{xy}^{By}|_{By=1} &= \sigma_{xy}^{By'}|_{By'=1} \sin \theta + \sigma_{xx}^{By'}|_{Bx'=1} \cos \theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$\sigma_y^{By}, \tau_{xy}^{By}, \sigma_x^{By}, \tau_{xy}^{By}$ にも式(25)と同様な関係がある。

σ_x^{By} を例にとると、これは半無限板中の一点 (ξ, η) に x 軸方向に平行なバーガースペクトル Bx をもつ

刃状転位が存在するとき、半無限板自由縁 ($x'=0$) に生じる応力 σ_x と τ_{xy} を打消すために任意点 (x, y) に生じる x 方向の垂直応力である。式(25)に含まれる $\sigma_x^{By'}$ 等は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \sigma_x^{By'} &= C[-A^5 - 4(n^2 - n + 1)A^3 \\ & - 3n^2(n^2 + 4n - 4)A]Bx' \\ \sigma_y^{By'} &= C[-A^5 - 4(2n^2 - n - 1)A^3 \\ & - n^2(7n^2 - 20n + 12)A]Bx' \\ \tau_{xy}^{By'} &= C[-(n-2)A^4 + 12n(n-1)A^2 \\ & + n^3(n^2 - 6n + 4)]By' \\ \sigma_x^{By'} &= C[(n-2)A^4 + 12n(n-1)A^2 \\ & - n^3(n^2 + 2n - 4)]By' \\ \sigma_y^{By'} &= C[(5n-2)A^4 + 4n(n^2 - 3n + 3)A^2 \\ & - n^3(n^2 - 6n + 4)]By' \\ \tau_{xy}^{By'} &= C[A^5 - 4(n-1)A^3 \\ & - n^2(n^2 - 12n + 12)A]By' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 A, n, C は式(27)で示される。

$$\begin{aligned} A &= \frac{\eta' - y'}{x'}, n = \frac{\xi' - x'}{x'} \\ C &= \frac{2G}{\pi(x+1)} \frac{1}{x'(A^2 + m^2)^3} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (27)$$

この問題は、著者らが先に転位よりも特異性の次数の大きい食違いまたは、集中力対の密度 $[P_1^*(\xi), P_2^*(\xi)]$ を未知関数とする超越特異積分方程式法 (HIEM) によって解析している。その積分方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{P_1^*(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_0^a K_{11}^*(\xi, x) P_1^*(\xi) d\xi \\ & + \int_0^a K_{12}^*(\xi, x) P_2^*(\xi) d\xi = p^*(x) \\ & \int_0^a \frac{P_2^*(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_0^a K_{21}^*(\xi, x) P_1^*(\xi) d\xi \\ & + \int_0^a K_{22}^*(\xi, x) P_2^*(\xi) d\xi = q^*(x) \end{aligned}$$

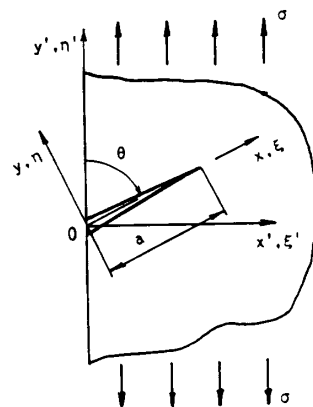


図 4 半無限板の斜め縁き裂

表 3 半無限板の縁き裂の無次元化応力拡大係数

N	Present Analysis	Boiko [3]		Kerpenko [3]
10	1.121853	1.12379	1.11801	1.1194
20	1.121537	1.12212	1.12054	1.1209
30	1.121524	1.12182	1.12103	1.1113
40	1.121521	1.12167	1.12147	1.1214
50	1.121521	1.12148	1.12121	1.1214
Koiter	1.121522			

表 4 半無限板の斜め縁き裂の無次元化応力拡大係数

θ deg.	N	Present Analysis		H I E M [6]	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
45°	5	0.70403	0.36557	0.70403	0.36557
	10	0.70500	0.36455	0.70449	0.36455
	15	0.70488	0.36446	0.70488	0.36446
	20	0.70489	0.36448	0.70489	0.36447
	25	0.70490	0.36448	0.70490	0.36448
θ deg.	N	Present Analysis		H I E M [6]	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
30°	10	0.46256	0.35388	0.46260	0.33590
	15	0.46254	0.33620	0.46257	0.33620
	20	0.46252	0.33619	0.46254	0.33619
	24	0.46250	0.33617	0.46250	0.33617
	30	0.46247	0.33616	0.46247	0.33616
θ deg.	N	Present Analysis		H I E M [6]	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
15°	20	0.23197	0.22618	0.23225	0.22637
	25	0.23180	0.22616	0.23184	0.22617
	30	0.23188	0.22621	0.23182	0.22616
	35	0.23180	0.22614	0.23181	0.22615
	40	0.23174	0.22616	0.23180	0.22614
θ deg.	N	Present Analysis		H I E M [6]	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
10°	30	0.18916	0.18916	0.16125	0.17333
	35	0.16108	0.17408	0.16207	0.17347
	40	0.16236	0.17337	0.16206	0.17346
	45	0.16782	0.17054	0.16205	0.17345
	50	0.16155	0.17428	0.16205	0.17345

$$p^*(x) = -\pi \frac{(x+1)^2}{2(x-1)} \sigma \sin^2 \theta$$

$$q^*(x) = -\pi \frac{x+1}{2} \sigma \sin \theta \cos \theta$$

.....(28)

ここで、 $\oint$ は発散積分の有限部分を取ることを意味し、 $K_j^*(\xi, x)(j=1, 2)$ は直線縁の影響を補正する関数である。この積分方程式も未知関数を、基本密度関数と Chebyshev 多項式の積で近似することにより同様に解析できる。

式(23)を上述の方法で解析し得られた、半無限板の斜め縁き裂の無次元化応力拡大係数の値の収束状況を、前報⁽⁶⁾の超越特異積分方程式法による解析結果とともに表4に示す。ここで N は $0 \leq x \leq a$ の範囲の選点数である。

本解析結果と、超越特異積分方程式法(HIEM)による解析結果を比較すると、 $\theta=10^\circ$ の場合には積分方

程式の形の違いによって結果に差が生じている。しかし、 $\theta \geq 15^\circ$ では、両者はほぼ等しい精度が得られている。

4. 結 言

本研究では、具体的問題を通してき裂の解析に古くから用いられている連続分布転位法による解析法を考察した。特異積分方程式の未知関数である転位密度を、基本転位密度関数と Chebyshev 多項式の積で近似して解くことによって、他の研究者の行った研究結果や、前報で示した超越特異積分方程式法による解析結果との比較を行い、本解析法の精度を確認した。結果をまとめると以下ようになる。

(1) 内部き裂の問題として、無限板中の十字き裂と半無限板中の内部き裂を解析した結果を過去の解析結果と比較すると本解析結果は、Gauss-Chebyshev, Lobatto-Chebyshev の数値積分公式を用いる方法より収束性は良い。Boiko や藤本による解析例と比較すると本解析結果の収束性はやや悪い。しかし、選点数を増すことにより同程度の精度を得ることができる。

(2) 縁き裂の問題として、半無限板の縁き裂の問題を解析した結果、過去の解析で良好な収束性の得られていない自由縁に直角なき裂は、Koiter の厳密解と有効数字7けた程度まで一致した。また、半無限板の斜め縁き裂の解析結果は前報の超越特異積分方程式法の解析結果とほぼ同程度の精度が得られた。

(3) 以上の考察から、連続分布転位法において未知関数を基本転位密度関数と Chebyshev 多項式の積で近似する方法は、内部き裂のみならず、縁き裂の解法にも高精度の結果を与える有効な解析法であることが具体的問題を通して示された。

文 献

- (1) Erdogan, F. and Gupta, G. D., *Q. Appl. Math.*, 30 (1972), 525.
- (2) Theocaris, P. S. and Ioakimidis, N. I., *Q. Appl. Math.*, 35(1977), 173.
- (3) Boiko, A. V. and Karpenko, L. N., *Int. J. Fract.*, 17-4 (1981), 381.
- (4) 藤本, 機論, 56-527, A(1990), 1505.
- (5) 野田・梅木・Erdogan, 機論, 55-520, A(1989), 2512.
- (6) 野田・小田・陳, 機論, 56-532, A(1990), 2405.
- (7) Koiter, W. T., *J. Appl. Mech.*, 32(1965), 237.
- (8) Kaya, A. C. and Erdogan, F., *Q. Appl. Math.*, 45-1 (1987), 105.